1.3.2 Množina všech dělitelů

Předpoklady: 010301

Pedagogická poznámka: Na začátku si rozebereme řadu z poslední Odpočítávané. Na způsob jejího generování většinou nikdo nepřijde a proto ji dostanou žáci domů na rozmyšlenou.

Jedna z řad, které jsme hráli v Odpočítávané: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... jaké pravidlo určuje další číslo v řadě?

- Postupně přičítáme lichá čísla: $1+3=4$, $4+5=9$, $9+7=16$, $16+9=25$, ...
- Řadu tvoří čísla, která získáme je součin čísla se sebou samým: $1\cdot 1=1$, $2\cdot 2=4$, $3\cdot 3=9$, $4\cdot 4=16$, $5\cdot 5=25$, ...

Pedagogická poznámka: Pojem druhé mocniny v tuto chvíli rozhodně nezavádím.

Poměrně často potřebujeme v matematice najít všechny dělitele určitého čísla. Pokus se najít všechny dělitele čísla 10.

$10=2\cdot 5$ nebo $10=1\cdot 10$ $\Rightarrow$ děliteli čísla 10 jsou čísla 1, 2, 5, 10.
Často píšeme $D_{10}=\{1,2,5,10\}$. Říkáme, že množinu všech dělitelů čísla 10 tvoří čísla 1, 2, 5 a 10.

Dodatek: Slovo množina používáme v matematice pro označení skupin, souhrnů čísel nebo jiných "věcí", které se označují jako prvky.

Jak určit všechny dělitele v jiných případech (například u čísla 12)?
Zkoušíme číslo 12 dělit a nalezené dělitele doplňujeme do tabulky.
$12:1=12$ $\Rightarrow$ 1,12
$12:2=6$ $\Rightarrow$ 2,6
$12:3=4$ $\Rightarrow$ 3, 4
$12:4=3$ $\Rightarrow$ 4, 3
$12:6=2$ $\Rightarrow$ 6, 2
$12:12=1$ $\Rightarrow$ 12, 1
Postupně vyplníme přehlednou tabulku.

<table>
<tr><td rowspan="2">12</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

$D_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$

Př. 1: Bylo nutné při hledání všech dělitelů čísla 12 zkoušet všechna přirozená čísla menší než 12?

Všechny dělitele jsme do tabulky zapsali dvakrát, protože se vždy objevují ve dvojicích $\Rightarrow$ stačí je zapsat jednou, jakmile je objevíme poprvé $\Rightarrow$ jakmile najdeme dvojici dělitelů podruhé, můžeme hledání zastavit.
Získáme tak kratší tabulku, která přesto obsahuje všechny dělitele.

12	1	2	3

	12	6	4

Pedagogická poznámka: Že jsme každého dělitele objevili dvakrát si žáci všimnou určitě, pak se rozhoří diskuse o tom, kde je třeba zastavit. V tomto okamžiku netlačím diskusi k tomu, abychom objevili druhou odmocninu, stačí, když se shodneme, že zastavíme, jakmile se objeví první dělitel podruhé nebo když se dostaneme do poloviny čísla (v případě, že žádné dělitele neobjevíme).

Př. 2: Najdi všechny dělitele čísel: 7, 9, 15, 24, 36.

$7:1=7 \Rightarrow 1,7$
$7:2=$ se zbytkem
$7:3=$ se zbytkem
$7:4=$ se zbytkem, jsme za polovinou $\Rightarrow$ dál nehledáme.
$D_7=\{1,7\}$

$9:1=9 \Rightarrow 1,9$
$9:2=$ se zbytkem
$9:3=3 \Rightarrow 3$ našli jsme číslo dvakrát $\Rightarrow$ dál nehledáme.
$D_9=\{1,3,9\}$

$15:1=15 \Rightarrow 1,15$
$15:2=$ se zbytkem
$15:3=5 \Rightarrow 3,5$
$15:4=$ se zbytkem
$15:5=3 \Rightarrow$ našli jsme číslo podruhé $\Rightarrow$ dál nehledáme.
$D_{15}=\{1,3,5,15\}$

$24:1=24 \Rightarrow 1,24$
$24:2=12 \Rightarrow 2,12$
$24:3=8 \Rightarrow 3,8$
$24:4=6 \Rightarrow 4,6$
$24:5=$ se zbytkem
$24:6=4 \Rightarrow$ našli jsme číslo podruhé $\Rightarrow$ dál nehledáme.
$D_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

$36:1=36 \Rightarrow 1,36$
$36:2=18 \Rightarrow 2,18$
$36:3=12 \Rightarrow 3,12$
$36:4=9 \Rightarrow 4,9$
$36:5=$ se zbytkem
$36:6=6 \Rightarrow$ našli jsme číslo dvakrát $\Rightarrow$ dál nehledáme.
$D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

Pedagogická poznámka: Netrvám na tom, aby žáci přesně dodržovali zápis v učebnici a nechávám je postupovat, jak chtějí. Pokud však některé z čísel zapomenou, je prvním pokynem návrat k postupnému a systematickému řešení. Snažím se tedy, aby systematičnost nebyla něčím mnou vnuceným, ale něčím, co pomáhá v nesnázích.

Př. 3: U všech přirozených čísel (s jedinou výjimkou) je možné najít stejný počet takzvaných samozřejmých dělitelů. Kolik samozřejmých dělitelů u každého přirozeného čísla najdeme? Jaká čísla to jsou? Které přirozené číslo je výjimkou?

U každého čísla jsme našli dva dělitele:
- číslo 1,
- dělené číslo (například u 7 číslo 7).

Tyto dva dělitele najdeme u každého čísla, proto je nazýváme samozřejmé. Každé číslo kromě čísla 1 má dva samozřejmé dělitele - číslo 1 a samo sebe.

Př. 4: Najdeme u přirozeného čísla více násobků nebo více dělitelů?

Počet dělitelů se u různých čísel liší (číslo 1 má jednoho dělitele, číslo 7 dva, číslo 36 šest), násobků má každé přirozené číslo nekonečně mnoho (například násobky čísla 2: 2,4,6,8,10 ...) $\Rightarrow$ každé přirozené číslo má více násobků než dělitelů.

Pedagogická poznámka: Značný počet žáků začne tvrdit (samozřejmě bez jakéhokoliv důvodu, že jich je stejně), rozhodně jim neříkám správné řešení, chci aby si zvolili libovolné číslo a zkusili si jak násobky, tak dělitele najít.
Hlavním přínosem příkladu by mělo být poznání, že když doopravdy zkusím na něco přijít a nestřílim, většinou to zjistím.

Př. 5: Kolik je mezi čísly menšími než 100:
a) násobků 11 b) násobků 3?

a) násobky 11
Násobky 11: 11, 22, 33, 44, ... $\Rightarrow$ Násobků 11 menších než 100 je 9 (největším je číslo 99).

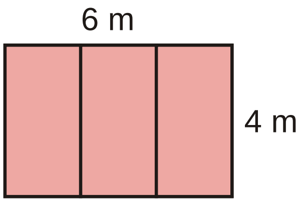
b) násobky 3
Násobky 3: 3, 6, 9, 12, ... (příliš mnoho čísel na prosté počítání) $\Rightarrow$ největší násobek 3 menší než 100 je číslo 99, $99:3=33$ $\Rightarrow$ násobků 3 menších než 100 je 33 (získali jsme je tak, že jsme číslo 3 postupně násobili čísly 1, 2, 3, ... 33).

Př. 6: Petr tvrdí: "U všech přirozených čísel je libovolný násobek větší než libovolný dělitel". Je to pravda?

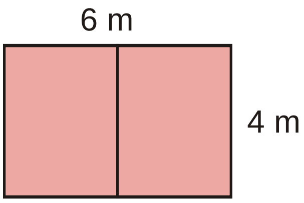
Ověříme si Petrovo tvrzení na konkrétním čísle.
$D_7 = \{1, 7\}$
Násobky 7: 7, 14, 21, 28, ...
Vidíme, že největší dělitel čísla (samo číslo) je stejné jako jeho nejmenší násobek (samo číslo) $\Rightarrow$ Petrovo tvrzení není správné (zapomněl na číslo samo, správně by věta zněla " U všech přirozených čísel je libovolný násobek větší než libovolný dělitel různý od tohoto čísla).

Pedagogická poznámka: Můžete žáky vyzvat k úpravě, která povede k tomu, že věta bude pravdivá.

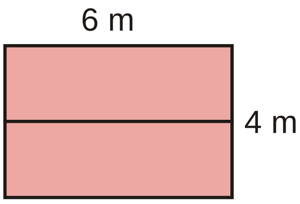
Př. 7: V obchodech se prodávají koberce o šířkách 2 m, 3 m, 4 m a 5 m. Kancelář má rozměry 6 m x 4 m. Jakou šířku koberce a kolik délkových metrů máme koupit, aby se stříhalo co nejméně (nestříhalo se podélně a využila se celá šířka koberce), pokryla se celá podlaha a nekombinovali jsme koberce různých šířek? Jak poznáme, které šířky můžeme použít?



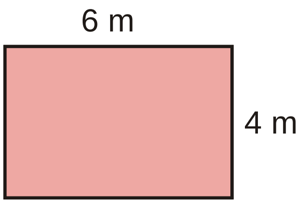
Celkem $3 \cdot 5 = 15\,\text{m}$ koberce o šířce 2 m.



Celkem $2 \cdot 4 = 8\,\text{m}$ koberce o šířce 3 m.



Celkem $2 \cdot 6 = 12\,\text{m}$ koberce o šířce 2 m.



Celkem 6 m koberce o šířce 4m.
Použít můžeme pouze takové šířky koberce, které jsou děliteli šířky nebo délky místnosti.

Př. 8: Sedminásobek neznámého čísla je větší než 46 a menší než 61. Urči neznámé číslo.

Násobky sedmi větší než 46 a menší než 61:
$49 = 7 \cdot 7$ $\Rightarrow$ hledaným číslem je číslo 7,
$56 = 7 \cdot 8$ $\Rightarrow$ hledaným číslem je číslo 8.
Neznámým číslem je buď číslo 7 nebo číslo 8.

Př. 9: Víme, že číslo *a* je násobek čísla *b*. Co můžeme prohlásit o čísle *b*?

Číslo *a* je násobek čísla *b* $\Rightarrow$ platí $a = k \cdot b$ $\Rightarrow$ číslo *b* je dělitel čísla *a*.

Pedagogická poznámka: Hra Tleskni dupni je převzata z učebnice Hejný a kol, Matematika 5, Fraus, 2011.

Hru vysvětluji chvilku před koncem hodiny, zbytek hodiny pak mají děti na trénink ve čtveřicích.

Spíše než průpravu k probírání společného násobku, vidím hru jako nácvik soustředění.

Hra Tleskni, dupni
Čtyři role:

- Hlasatel ve dvou sekundových intervalech postupně hlásí čísla 0, 1, 2, 3.
- Tleskač na každé druhé číslo tleskne.
- Dupač na každé třetí číslo dupne.
- Hlídač hlídá, zda někdo nepodvádí.

Jak dlouho vydrží tleskač (dupač) tleskat (dupat) bez chyby?

Shrnutí: Systematickým postupem můžeme najít všechny dělitele libovolného čísla.